

GEOMETRIA MÉTRICA ESPACIAL

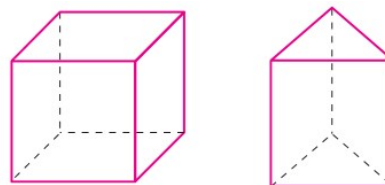
No cotidiano, estamos cercados de objetos que têm formas diferentes. Por exemplo, uma caixa de papelão; suas faces são retângulos, uma caixa é um paralelepípedo, uma lata de óleo tem a forma de um cilindro e sua base é um círculo.

Outros exemplos:



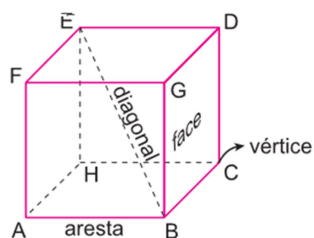
Poliedros

Define-se poliedro como o sólido geométrico limitado por polígonos que possuem, dois a dois, um lado comum.



Elementos dos Poliedros

Os elementos de um poliedro são: faces, arestas e vértices.



Na figura, temos:
6 faces
12 arestas
8 vértices
4 diagonais

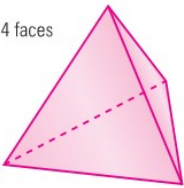
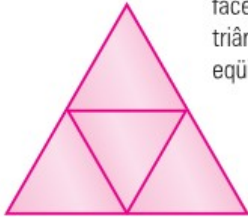
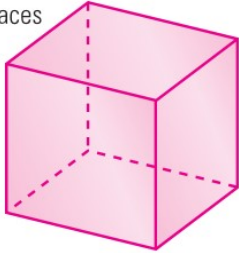
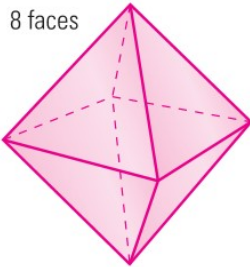
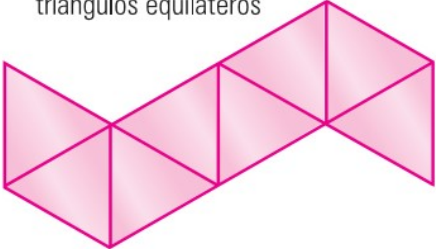
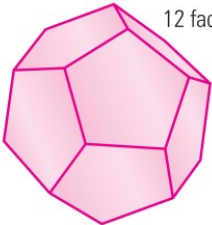
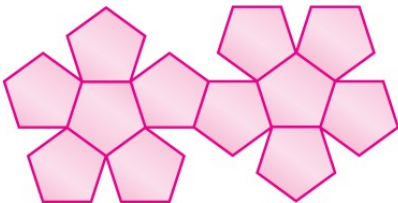
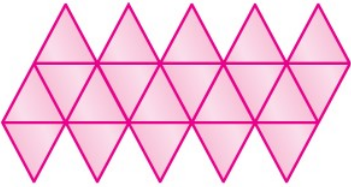
De acordo com o número de faces, podemos classificar os poliedros em:

- 4 faces – tetraedro
- 5 faces – pentaedro
- 6 faces – hexaedro
- 7 faces – heptaedro
- 8 faces – octaedro
- 10 faces – decaedro
- 12 faces – dodecaedro ...
- 20 faces – icosaedro

Poliedro Regular

Um poliedro é regular se suas faces são polígonos regulares com o mesmo número de lados. Há somente cinco poliedros regulares.

Exemplos:

Poliedro Regular	Planificação
Tetraedro regular 4 faces 	 faces: triângulos equiláteros
Hexaedro (cubo) 6 faces 	 faces: quadrado
Octaedro regular 8 faces 	 faces: triângulos equiláteros
Dodecaedro regular 12 faces 	 faces: pentágonos regulares
Icosaedro regular 20 faces 	 faces: triângulo equiláteros

Relação de Euler

Em todo poliedro convexo, vale a relação:

$$V - A + F = 2 \quad \text{em que: } V = \text{número de vértices}$$

A = número de arestas

F = número de faces

Resumindo

Nome	v	A	F	S
Tetraedro	4	6	4	720°
Hexaedro	8	12	6	2160°
Octaedro	6	12	8	1440°
Dodecaedro	20	30	12	6480°
Icosaedro	12	30	20	3600°

Em que $S = (V - 2) \cdot 360^\circ$ (soma dos ângulos de todas as faces).

Exemplos:

- 1) Num poliedro convexo, o número de faces é 8 e o número de arestas é 12. Qual é o número de vértices desse poliedro?

Solução: Usando a relação de Euler, temos:

$$V + F = A + 2$$

$$V + 8 = 12 + 2$$

$$V = 6$$

O poliedro possui 6 vértices.

- 2) Um poliedro convexo possui 2 faces triangulares e 3 faces quadrangulares. Determine o número de arestas e de vértices desse poliedro.

Solução:

Número de arestas

$$\begin{cases} 2 \text{ faces triangulares} \\ 3 \text{ faces quadrangulares} \end{cases}$$

$$2 \times 3 = 6$$

$$3 \times 4 = 12$$

$$18 \text{ arestas}$$

Uma aresta é comum a 2 faces, então $2A = 18 \Rightarrow A = 9$.

Número de vértices:

$$V + F = A + 2$$

$$F = 2 + 3$$

$$V + 5 = 9 + 2$$

$$F = 5$$

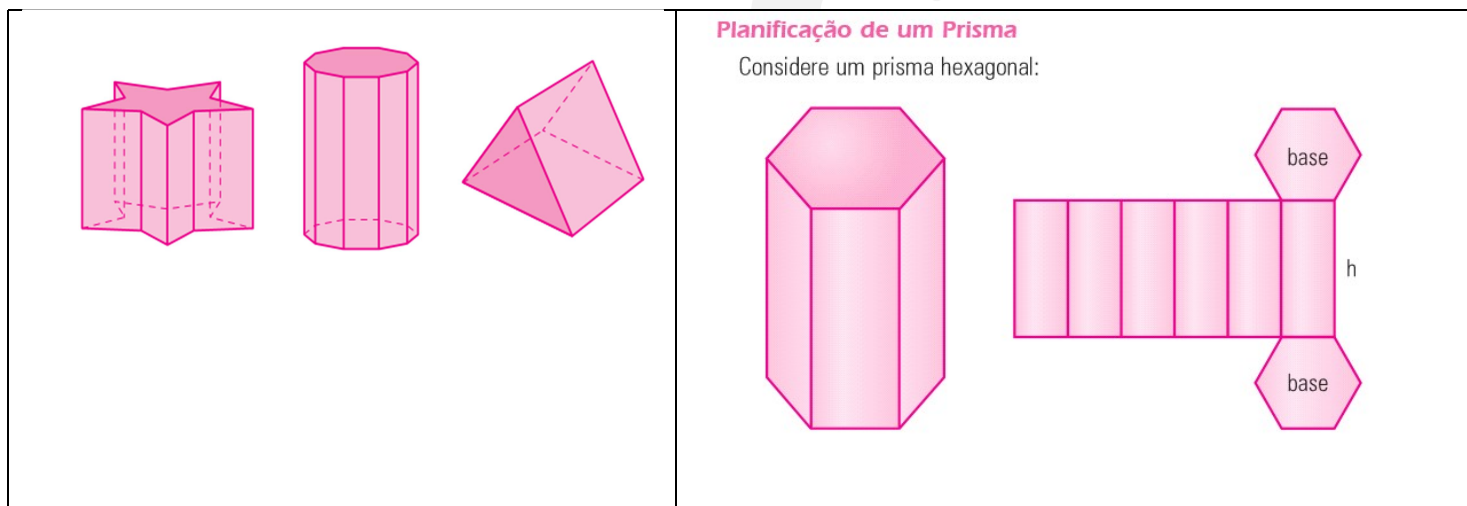
$$V = 11 - 5$$

$$V = 6$$

O poliedro possui 9 arestas e 6 vértices.

Prisma

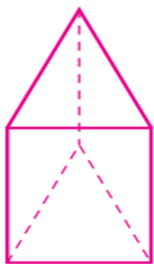
Prisma é um sólido delimitado por faces planas, em que as faces laterais são paralelogramos, e as bases são polígonos congruentes.



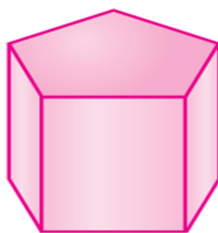
De acordo com o número de lados, os prismas classificam-se em:

Prisma	Bases
triangular	triângulos
quadrangular	quadriláteros
pentagonal	pentágonos
hexagonal	hexágonos

Exemplos:



prisma triangular
(bases são triângulos)



prisma pentagonal
(bases são pentágonos)

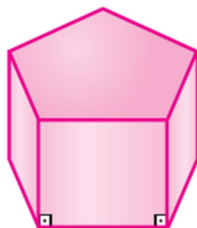
Conforme a inclinação das arestas laterais, os prismas classificam-se em retos e oblíquos.

Oblíquo



prisma oblíquo
(quadrangular)

Reto



prisma regular
(pentagonal)

Área da superfície total de um prisma reto

É a soma das áreas das superfícies das bases com a área da superfície lateral.

$$A_t = 2 \cdot A_b + A_L$$

A_b é a área da base do prisma.

A_L é a soma das áreas das faces laterais.

Volume

É o produto da área da base pela altura h .

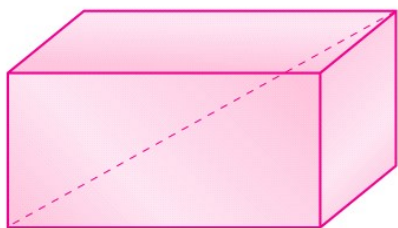
$$V = A_b \cdot h$$

Paralelepípedo

São prismas nos quais as seis faces são paralelogramos.

Paralelepípedo retângulo

É um paralelepípedo reto cujas faces são retângulos.



a — comprimento
b — largura
c — altura
D — diagonal

Fórmulas importantes:

diagonal da face: $d = \sqrt{a^2 + c^2}$

diagonal: $D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

área total: $A_t = 2(ab + ac + bc)$

volume: $V = abc$

Exemplo:

Para encher uma caixa d'água de 3 metros de comprimento por 2 metros de largura e 2 metros de profundidade, foram necessários 12000 litros de água.

Solução:

Devemos calcular o volume da caixa d'água:

$$V = 3 \cdot 2 \cdot 2$$

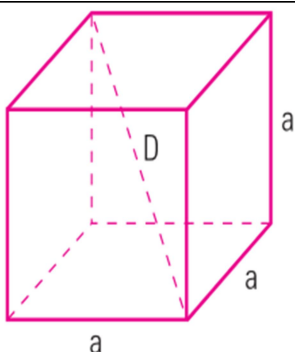
$$V = 12 \text{ m}^3$$

Relacionando $1 \text{ l} = 1 \text{ dm}^3$, então $12 \text{ m}^3 = 12000 \text{ dm}^3$

$$12000 \text{ dm}^3 = 12000 \text{ l}$$

Cubo

É um paralelepípedo cujas dimensões são iguais: $a = b = c$.



Diagonal: $D = a\sqrt{3}$
Área total: $A_t = 6a^2$
Volume: $V = a^3$

Saiba mais

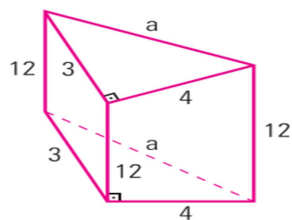
Quando há enchente, podemos verificar que alguns materiais, como a madeira e a lâ de vidro, flutuam na água. Isso ocorre porque esses materiais apresentam densidade menor do que a água.

Material	Densidade(g/cm³)
madeira	0,65
lã de vidro	0,20
água	1,00

Exemplos:

1) Determine a área da base, a área lateral, a área total e o volume de um prisma reto, de altura igual a 12 cm, cuja base é um triângulo retângulo de catetos 3 e 4 cm.

Solução:



$$\begin{aligned}A_l &= 4 \cdot 12 + 3 \cdot 12 + 5 \cdot 12 \\A_l &= 144 \text{ cm}^2 \\A_t &= A_l + 2A_b \\A_t &= 144 + 2 \cdot 6 \\A_t &= 156 \text{ cm}^2\end{aligned}$$

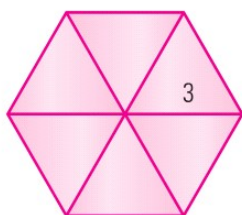
$$\begin{aligned}A_b &= \frac{3 \cdot 4}{2} = 6 \text{ cm}^2 \\a^2 &= 4^2 + 3^2 \\a^2 &= 25 \\a &= 5\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}V &= A_b \cdot h \\V &= 6 \cdot 12 \\V &= 72 \text{ cm}^3\end{aligned}$$

2) Calcule o volume de um prisma hexagonal de altura 8 cm e aresta da base igual a 3 cm.

Solução:

Área da base:



A base é um hexágono formado por 6 triângulos equiláteros.

A área do hexágono é 6 vezes a área de cada um desses triângulos.

$$A_b = 6 \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$$

$$A_b = \frac{6 \cdot 3^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$$

$$A_b = \frac{27\sqrt{3}}{2} \text{ cm}^2$$

$$V = A_b \cdot h$$

$$V = \frac{27}{2} \sqrt{3} \cdot 8$$

$$V = 108\sqrt{3} \text{ cm}^3$$

3) Dado um paralelepípedo reto retângulo de dimensões 2, 3, 4 m, calcule:

a) a diagonal

$$D = \sqrt{2^2 + 3^2 + 4^2}$$

$$D = \sqrt{4 + 9 + 16}$$

$$D = \sqrt{29} \text{ m}$$

c) o volume

$$V = a \cdot b \cdot c$$

$$V = 2 \cdot 3 \cdot 4$$

$$V = 24 \text{ m}^3$$

b) a área total

$$A_t = 2(ab + bc + ac)$$

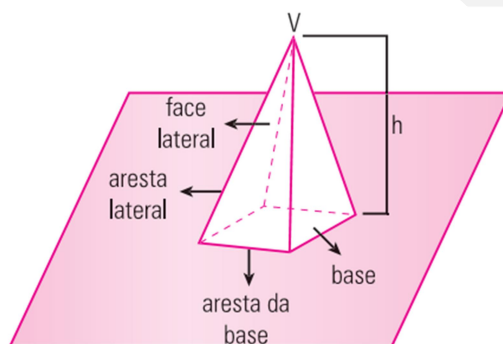
$$A_t = 2(2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 2 \cdot 4)$$

$$A_t = 2(6 + 12 + 8)$$

$$A_t = 52 \text{ m}^2$$

Pirâmide

Pirâmide é um sólido delimitado por faces planas, em que suas faces laterais são triângulos e a base é um polígono.



Classificação

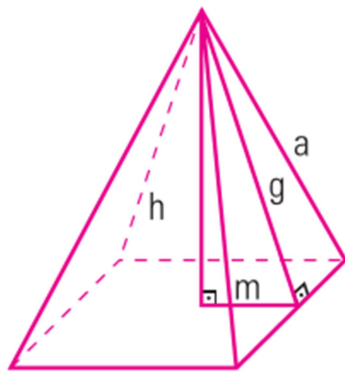
As pirâmides são classificadas de acordo com o número de lados dos polígonos da base.

Pirâmide	Base
Pirâmide triangular	triângulo
Pirâmide quadrangular	quadrilátero
Pirâmide pentagonal	pentágono
Pirâmide hexagonal	hexágono

Pirâmide Regular

Uma pirâmide é regular quando sua base é um polígono regular.

Área da Superfície Total



O apótema do polígono regular da base é chamado apótema da base (m). A altura de uma face lateral é chamada apótema da pirâmide (g).

Área total

$$A_t = A_l + A_b$$

Volume

$$V = \frac{1}{3} \cdot A_b \cdot h$$

Exemplo:

Numa pirâmide quadrangular regular, a aresta da base mede 6 cm. Sabendo-se que a altura da pirâmide é 4 cm, calcule a área lateral, a área total e o volume da pirâmide.

Solução:

A base da pirâmide é um quadrado:

$$m = \frac{a}{2}$$

$$m = \frac{6}{2}$$

$$m = 3 \text{ cm}$$

• apótema da pirâmide (g)

$$g^2 = h^2 + m^2$$

$$g^2 = 4^2 + 3^2$$

$$g^2 = 25$$

$$g = 5$$

- área lateral

$$A_{\ell} = 4 \cdot A_f$$

$$A_{\ell} = 4 \cdot 15$$

$$A_{\ell} = 60 \text{ cm}^2$$

$$A_f = \frac{\ell \cdot g}{2}$$

$$A_f = \frac{6 \cdot 5}{2}$$

$$A_f = 15 \text{ cm}^2$$

- área total

$$A_t = A_{\ell} + A_b$$

$$A_t = 60 + 36$$

$$A_t = 96 \text{ cm}^2$$

$$A_b = 6^2$$

$$A_b = 36 \text{ cm}^2$$

- volume

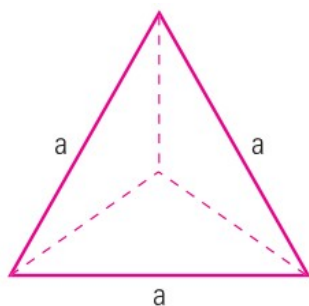
$$V = \frac{1}{3} \cdot A_b \cdot h$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot 36 \cdot 4$$

$$V = 48 \text{ cm}^3$$

Tetraedro

É uma pirâmide de base triangular em que todas as faces são triângulos equiláteros.



- apótema lateral é a altura de um triângulo equilátero $g = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

- altura da pirâmide é dada por $h = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Área da base

$$A_b = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

Área total

$$A_t = a^2\sqrt{3}$$

Volume

$$V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$$

Exemplo:

A aresta de um tetraedro regular mede 6 cm. Calcule:

a) a medida da altura do tetraedro

$$h = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

$$h = \frac{6\sqrt{6}}{3} = 2\sqrt{6} \text{ cm}$$

b) a área total do tetraedro

$$A_t = a^2\sqrt{3}$$

$$A_t = 6^2\sqrt{3}$$

$$A_t = 36\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

c) o volume

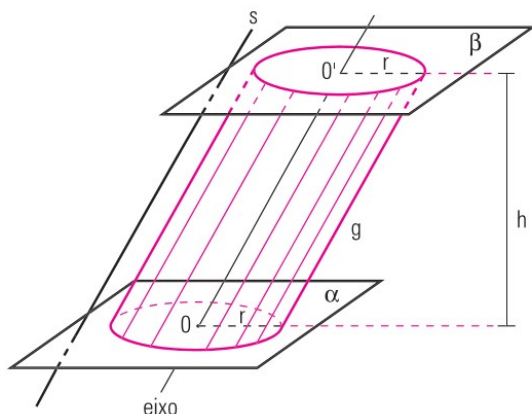
$$V = \frac{6^3\sqrt{2}}{12}$$

$$V = \frac{216\sqrt{2}}{12}$$

$$V = 18\sqrt{2} \text{ cm}^3$$

Cilindro

Definimos cilindro como o sólido formado pelos infinitos segmentos de reta de extremidades nos dois círculos dados e paralelos à reta s .

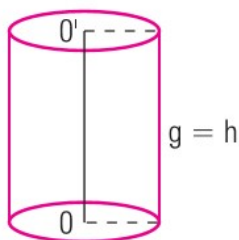


Elementos do cilindro

- Os círculos de centro O e O' e raio r são as bases.
- Os segmentos paralelos a s com extremidades nas circunferências das bases são as geratrizes.
- A distância entre α e β , planos das bases, é a altura.

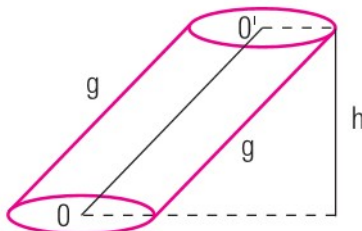
Cilindro Reto ou de Revolução

O cilindro cujas geratrizes são perpendiculares às bases ($g = h$) é chamado de cilindro reto.



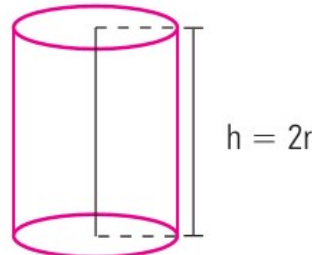
Cilindro Oblíquo

É aquele em que as geratrizes não são perpendiculares às bases.

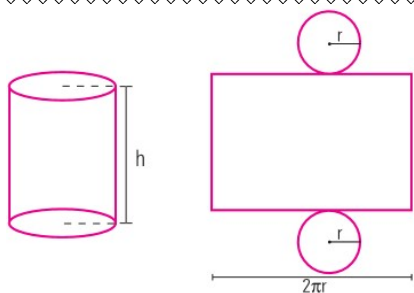


Cilindro Equilátero

Um cilindro reto é equilátero quando a altura é igual ao dobro do raio das bases.



Dado o cilindro reto de altura h :



Área total

É a soma das áreas das bases com a área lateral:

$$A_t = 2A_b + A_l$$

em que: $A_b = \pi r^2$

$$A_l = 2\pi r h$$

$$A_t = 2\pi r(r + h)$$

Volume

O volume de um cilindro é igual ao produto da área da base (A_b) pela altura (h).

$$V = \pi r^2 h$$

1) Dado um cilindro reto de altura $h = 8$ cm e raio da base 3 cm, calcule:

a) a área da base

$$A_b = \pi r^2$$

$$A_b = \pi 3^2$$

$$A_b = 9\pi \text{ cm}^2$$

b) a área lateral

$$A_l = 2\pi r h$$

$$A_l = 2\pi 3 \cdot 8$$

$$A_l = 48\pi \text{ cm}^2$$

c) a área total

$$A_t = 2\pi r(r + h)$$

$$A_t = 2\pi 3(3 + 8)$$

$$A_t = 66\pi \text{ cm}^2$$

d) o volume

$$V = \pi r^2 h$$

$$V = \pi 3^2 \cdot 8$$

$$V = 72 \text{ cm}^3$$

2) Calcule a área da base, a área lateral, a área total e o volume de um cilindro equilátero ($h = 2r$) cujo raio é igual a 4 cm.

área da base

$$A_b = \pi r^2$$

$$A_b = \pi \cdot 16$$

$$A_b = 16\pi \text{ cm}^2$$

área total

$$A_t = 2\pi r(r + h)$$

$$A_t = 2\pi \cdot 4(4 + 8)$$

$$A_t = 96\pi \text{ cm}^2$$

área lateral

$$A_l = 2\pi rh$$

$$A_l = 2\pi \cdot 4 \cdot 8$$

$$A_l = 64\pi \text{ cm}^2$$

$$h = 2r$$

$$h = 8 \text{ cm}$$

volume

$$V = \pi r^2 h$$

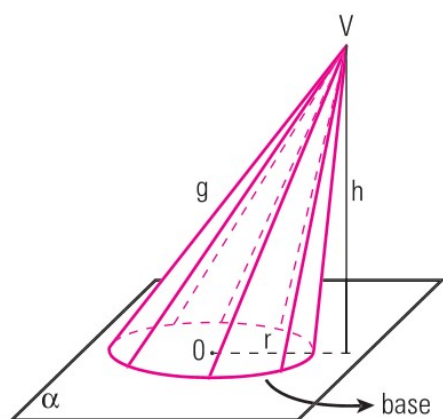
$$V = \pi \cdot 4^2 \cdot 8$$

$$V = 128 \text{ cm}^3$$

Cone

Cone é um sólido geométrico formado por segmentos que têm uma extremidade no V (vértice) e a outra é um ponto do círculo.

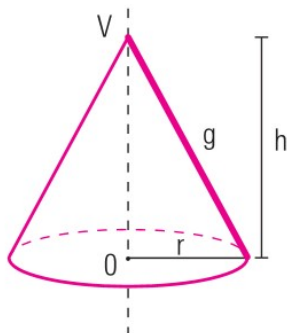
Elementos do cone



- V é o vértice.
- A distância entre o vértice V e o plano α é a altura do cone (h).
- $\overline{OV}$ é o eixo.
- Os segmentos com uma extremidade na circunferência da base e a outra no ponto V são as geratrizes.

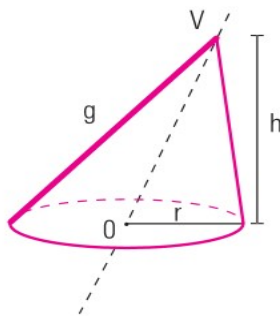
Cone Reto

O eixo é perpendicular ao plano da base.



Cone Oblíquo

O eixo não é perpendicular ao plano da base.

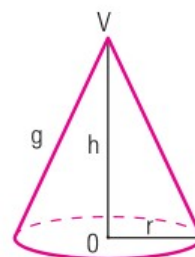


Num cone circular reto, podemos estabelecer a relação:

$$g^2 = h^2 + r^2$$

Cone Equilátero

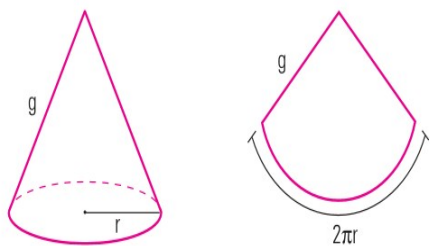
Um cone é equilátero quando a geratriz é igual ao dobro do raio da base



$$g = 2r$$

$$h = r\sqrt{3}$$

Área de um Cone



Área lateral

$$A_L = \pi r g$$

Área total

$$A_t = \pi(r + g)$$

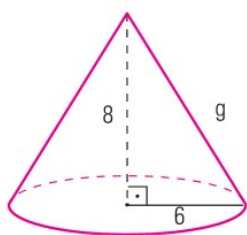
Volume

$$V = \frac{\pi r^2 h}{3}$$

Exemplo:

Calcule a área da base, a área lateral, a área total e o volume de um cone reto, de altura igual a 8 cm e o raio da base igual a 6 cm.

Solução:



Área da base

$$A_b = \pi r^2$$

$$A_b = \pi 6^2$$

$$A_b = 36\pi \text{ cm}^2$$

Área lateral

$$A_L = \pi r g$$

$$A_L = \pi \cdot 6 \cdot 10$$

$$A_L = 60\pi \text{ cm}^2$$

$$g^2 = h^2 + r^2$$

$$g^2 = 8^2 + 6^2$$

$$g^2 = 100$$

$$g = 10$$

área total

$$A_t = A_b + A_L$$

$$A_t = 36\pi + 60\pi$$

$$A_t = 96\pi \text{ cm}^2$$

Volume

$$V = \frac{A_b \cdot h}{3}$$

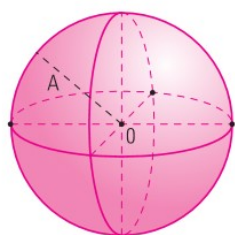
$$V = \frac{36\pi \cdot 8}{3}$$

$$V = 96 \text{ cm}^3$$

Esfera

Seja um ponto O (centro) e um segmento qualquer AO. A reunião de todos os segmentos AO é um sólido denominado esfera.

Elementos da esfera



- Centro: ponto O.
- Raio: medida de qualquer segmento AO.
- Diâmetro: intersecção com qualquer reta que corte a esfera e passe pelo seu centro.

Área de uma esfera

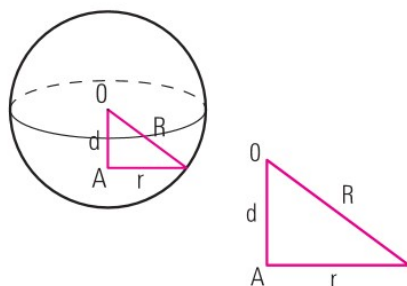
$$A = 4\pi R^2$$

Volume de uma esfera

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

Secção da esfera

A intersecção da esfera e um plano é um círculo.



Em que:

$$R^2 = r^2 + d^2$$

R – raio da esfera

r – raio do círculo

d – distância do círculo ao centro da esfera.

Exemplo:

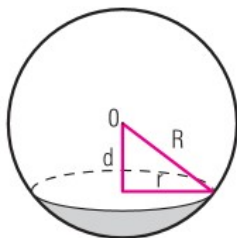
Uma secção plana feita a 4 cm do centro de uma esfera tem área igual a $25\pi \text{ cm}^2$. Calcule a área e o volume da superfície esférica.

Solução:

$$A = \pi r^2 \Rightarrow 25\pi = \pi r^2$$

$$r^2 = 25$$

$$r = 5 \text{ cm}$$



$$A = 4\pi R^2$$

$$A = 4\pi (\sqrt{41})^2$$

$$A = 164\pi \text{ cm}^2$$

$$R^2 = r^2 + d^2$$

$$R^2 = 5^2 + 4^2$$

$$R^2 = 25 + 16$$

$$R^2 = 41$$

$$R = \sqrt{41}$$

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

$$V = \frac{4}{3}\pi (\sqrt{41})^3$$

$$V = \frac{164\pi\sqrt{41}\text{cm}^3}{3}$$

Fonte de Pesquisa

Manual de Matemática, disponível em

[LIVROS/LIVROS%20DE%20MATEMATICA/Geometria%20Plana.pdf](#)